УДК 517.977.52/54

Н. Н. Субботина

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИПШИЦЕВЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ*

1. Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу P оптимального управления системой, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где t – время; $t \in [0, T]$; $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы; значения управляющего параметра u выбираются из заданного компактного множества $U \subset \mathbb{R}^m$, начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Фиксирован момент окончания процесса управления T. Допустимыми управлениями являются измеримые функции $u(\cdot) : [t_0, T] \to U$. Символом $\mathbf{U}_{[t_0,T]}$ обозначается множество всех допустимых управлений. Задан функционал платы $I_{t_0,x_0}(u(\cdot))$ вида

$$I_{t_0,x_0}(u(\cdot)) = \sigma(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))\, dt, \tag{1.2}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ – траектория динамической системы (1.1), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_{[t_0,T]}$.

Оптимальный результат в задаче P, т. е. (*цена*) $V(t_0, x_0)$, определяется соотношением

$$(t_0, x_0) \to V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)\in \mathbf{U}_{[t_0,T]}} I_{t_0,x_0}(u(\cdot)) \tag{1.3}$$

для начальной точки $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Задача рассматривается для всех (t_0, x_0) в полосе $\widetilde{\Gamma}_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Ниже используется также полоса $\Gamma_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$.

---

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00609 и гранта Президента РФ по поддержке научных школ № НШ–8512.2006.1

1.1. Основные предположения

Для точек $(t,x) \in \widetilde{\Gamma}_T$ и векторов $p \in \mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение гамильтониан задачи $H(t,x,p)$

$$H(t,x,p) = \min_{u \in P}[\langle p, f(t,x,u)\rangle + g(t,x,u)], \tag{1.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – символ скалярного произведения. Определим множества

$$E(t,x) = \{(f(t,x,u), g(t,x,u)) : \ u \in P\}, \tag{1.5}$$

$$E^0(t,x,p) = \arg\min\{[\langle p, f\rangle + g] : \ (f,g) \in E(t,x)\}. \tag{1.6}$$

Предполагается, что исходные данные рассматриваемой задачи P удовлетворяют следующим условиям.

A1. Функции $f(t,x,u)$ в (1.1) и $g(t,x,u)$ в (1.2) определены и непрерывны при $(t,x,u) \in \widetilde{\Gamma}_T \times P$. Выполнено условие Липшица относительно (t,x):

$$\|f(t',x',u) - f(t'',x'',u)\| \leqslant L_f(|t'-t''| + \|x'-x''\|), \tag{1.7}$$

$$|g(t',x',u) - g(t'',x'',u)| \leqslant L_g(|t'-t''| + \|x'-x''\|), \tag{1.8}$$

для любых $t',t'' \in [0,T]$, $x',x'' \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ с константами $L_f > 0$, $L_g > 0$.

A2. Терминальная функция платы $\sigma(x)$ в (1.2) определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными.

A3. Для любой точки $(t,x) \in \widetilde{\Gamma}_T$ и вектора $p \in \mathbb{R}^n$ множество $E^0(t,x,p)$ состоит из единственного элемента, т. е.

$$E^0(t,x,p) = \{(f^0(t,x,p), g^0(t,x,p))\} \in E(t,x). \tag{1.9}$$

1.2. Обобщенное уравнение Беллмана

Хорошо известно [2,5,6,8,10,11,13–18,21], что функция цены $V(t,x)$ (1.3) рассматриваемой задачи P (1.1)–(1.2) играет ключевую роль в исследовании и решении этой задачи.

Согласно классическим результатам Беллмана [2] функция $V(t,x)$ (1.3) в регулярных точках (t,x) (в точках дифференцируемости) удовлетворяет уравнению

$$\partial V(t,x)/\partial t + H(t,x,D_x V(t,x)) = 0, \tag{1.10}$$

а также краевому условию

$$V(T,x) = \sigma(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Здесь $D_x V(t,x) = (\partial V(t,x)/\partial x_1, \ldots, \partial V(t,x)/\partial x_n)$, а символом $D\sigma(\cdot)$ будем далее обозначать вектор-градиент $(\partial\sigma/\partial x_1, \ldots, \partial\sigma/\partial x_n)$.

Приведем некоторые известные свойства этой функции.

Утверждение 1. [5,10] *Функция цены* $V(t,x)$ (1.3) *в задаче* P *при выполнении условий* A1–A3 *является локально-липшицевой, т. е. на любом компакте* $Q \subset \widetilde{\Gamma}_T$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $L = L(Q) > 0$.

Из этого утверждения следует, что в любой точке $(t,x) \in \Gamma_T$ и для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ для функции цены $V(t,x)$ определены и конечны верхняя $d^+V(t,x)/(1,h)$ и нижняя $d^-V(t,x)/(1,h)$ полупроизводные Дини по направлению $(1,h) \in R^{n+1}$ (см. [4,5,7,9,20]):

$$d^+V(t,x)/(1,h) = \limsup_{\delta_k \downarrow 0,\, h'_k \to h,\, k \to \infty} \frac{V(t+\delta_k,\ x+\delta_k h'_k) - V(t,x)}{\delta_k}; \tag{1.12}$$

$$d^-V(t,x)/(1,h) = \liminf_{\delta_k \downarrow 0,\, h'_k \to h,\, k \to \infty} \frac{V(t+\delta_k,\ x+\delta_k h'_k) - V(t,x)}{\delta_k}. \tag{1.13}$$

Утверждение 2. [11] *Для того чтобы локально липшицевая функция* $\widetilde{\Gamma}_T \ni (t,x) \mapsto V'(t,x) \in R$ *совпадала с функцией цены* $V(t,x)$ *в задаче* P (1.1)–(1.3), *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках* $(t,x) \in \Gamma_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$ *выполнялось равенство*

$$\min_{(f,g) \in \widetilde{E}(t,x)} d^{\pm}V'(t,x)/(1,f) + g = 0, \tag{1.14}$$

где

$$\widetilde{E}(t,x) := \mathrm{co}\{(f(t,x,u), g(t,x,u)) :\ u \in P\},$$

а также должно выполняться краевое условие

$$V'(T,x) = \sigma(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

Замечание 1. Равенства (1.14) обращаются в уравнение Беллмана (1.10) в тех точках (t,x), где функция цены дифференцируема [21].

1.3. Обобщенная характеристическая система

Рассмотрим, опираясь на предположения A1–A3, следующую обобщенную характеристическую систему для уравнения Беллмана (1.10):

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{x}}{dt} = D_pH(t,\widehat{x},\widehat{p}) = f^0(t,\widehat{x},\widehat{p}), \\ \dfrac{d\widehat{p}}{dt} \in -\partial_x^{Cl} H(t,\widehat{x},\widehat{p}), \\ \dfrac{d\widehat{z}}{dt} = \langle \widehat{p}, D_pH(t,\widehat{x},\widehat{p})\rangle - H(t,\widehat{x},\widehat{p}) = -g^0(t,\widehat{x},\widehat{p}). \end{cases} \tag{1.16}$$

Здесь $H(t,x,p)$ – гамильтониан (1.4); символом $D_pH(t,\widehat{x},\widehat{p})$ обозначен вектор

$$D_pH(t,\widehat{x},\widehat{p}) = (\partial H(t,\widehat{x},\widehat{p})/\partial p_1,\ldots,\partial H(t,\widehat{x},\widehat{p})/\partial p_n),$$

символом $\partial_x^{Cl}H(t,\widehat{x},\widehat{p})$ обозначено множество, называемое субдифференциалом Кларка по переменной x, которое, в силу предположения A1, имеет следующее представление (см. [5]):

$$\partial_x^{Cl}H(t,\widehat{x},\widehat{p}) = \mathrm{co}\{\forall \lim_{(t',x')\to(t,\widehat{x})} D_xH(t',x',\widehat{p})\}. \tag{1.17}$$

Символ co в формулах (1.17), (1.14) означает выпуклую оболочку, рассматриваемые точки $(t',x',\widehat{p})$ являются регулярными точками гамильтониана $H(\cdot)$, следовательно,

$$D_xH(t',x',\widehat{p}) = (\partial H(t',x',\widehat{p})/\partial x_1,\ldots,\partial H(t',x',\widehat{p})/\partial x_n).$$

Краевое условие в задаче Коши (1.11) для уравнения Беллмана (1.10) порождает краевые условия

$$\widehat{x}(T,y) = y,\quad \widehat{p}(T,y) = D\sigma(y),\quad \widehat{z}(T,y) = \sigma(y), \tag{1.18}$$

где $y\in\mathbb{R}^n$ – параметр. Решения характеристической системы (1.16) с краевым условием (1.18) (см. [1]) – абсолютно непрерывные функции

$$(\widehat{x}(\cdot),\widehat{p}(\cdot),\widehat{z}(\cdot)):\ [0,T]\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times R,$$

которые, в силу предположений A1–A3, определены на отрезке $[0,T]$, – называются *обобщенными характеристиками* [19, 21].

Ниже приведены известные [1, 5] необходимые условия оптимальности в задаче P (1.1)–(1.3) в терминах обобщенных характеристик.

Утверждение 3. *Если в задаче* (1.1), (1.2), *выполнены условия* A1, A2, *то при любых* $(t,x)\in\Gamma_T$ *цена* $V(t,x)$ (1.3) *равна*

$$V(t,x) = \min_{u(\cdot)\in\mathbf{U}_{[t,T]}} I_{t,x}(u(\cdot)) = I_{t,x}(u^0(\cdot)). \tag{1.19}$$

Утверждение 4. *Для любой начальной точки* $(t,x)\in\Gamma_T$ *множество обобщенных характеристик, пересекающихся в этой точке, т. е.* $\widehat{x}(t,y)=x$, *содержит все оптимальные траектории* $x^0(\cdot)=x^0(\cdot;t,x,u^0(\cdot)):[t_0,T]\to\mathbb{R}^n$ *динамической системы* (1.1), *которые порождаются допустимыми оптимальными управлениями* $u^0(\cdot)\in\mathbf{U}_{[t_0,T]}$. *Следовательно, справедливы равенства*

$$x^0(\tau;t,x,u^0(\cdot)) = \widehat{x}(\tau,x^0(T))\qquad \forall\,\tau\in[t,T]. \tag{1.20}$$

2. Необходимые и достаточные условия оптимальности

2.1. Функция цены и обобщенные характеристики

Нетрудно видеть [11], что следствием утверждений 3 и 4 является следующая репрезентативная формула для функции цены $V(t,x)$ (1.3).

Утверждение 5. *Для любой начальной точки* $(t,x) \in \Gamma_T$ *имеет место следующее представление функции цены* $V(t,x)$ (1.3):

$$V(t,x) = \min_{u^e(\cdot)\in \mathbf{U}_{[t,T]}} I_{t,x}(u^e(\cdot)) = \min_{\widehat{x}(t,y)=x} \left(\sigma(y) + \int_t^T g^0(\tau, \widehat{x}(\tau,y), \widehat{p}(\tau,y))\, d\tau \right), \tag{2.1}$$

где $\widehat{x}(\cdot,y)$ *– все те обобщенные характеристики* (1.16), *которые пересекаются в точке* (t,x).

Ниже с учетом утверждения 2 будет предложено упрощение этого представления, полезное для разработки эффективных алгоритмов построения функции цены.

2.2. Полупроизводные по направлению липшицевых функций

Пусть $V'(t,x)$ – произвольная локально-липшицевая функция, определенная в полосе Γ_T. Введем в рассмотрение следующую конструкцию.

Определение 1. Для любой точки $(t,x) \in \Gamma_T$ и вектора $h \in \mathbb{R}^n$ *частным субдифференциалом в направлении* $(1,h) \in R^{n+1}$ для функции $V'(\cdot)$ в точке (t,x) назовем множество

$$\partial_{1,h} V'(t,x) = \mathrm{co}\left\{ \lim_{\delta_k \downarrow 0, h'_k \to h, k\to\infty} \left(\frac{\partial V'(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k)}{\partial t}, D_x V'(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k) \right) \right\},$$

где $(t+\delta_k, x+\delta_k h'_k)$ – точки регулярности функции $V'(t,x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *В любой точке* $(t,x) \in \Gamma_T$ *и при любом векторе* $h \in \mathbb{R}^n$ *для локально липшицевой функции* $V'(t,x)$ *имеют место следующие оценки:*

$$\min_{(\alpha,p)\in\partial_{1,h}V'(t,x)} \langle (\alpha,p),(1,h)\rangle \leqslant d^- V'(t,x)/(1,h) \leqslant$$
$$\leqslant d^+ V'(t,x)/(1,h) \leqslant \max_{(\alpha,p)\in\partial_{1,h}V'(t,x)} \langle (\alpha,p)(1,h)\rangle. \tag{2.2}$$

Справедливость этого утверждения следует из определения 1 и определений полупроизводных Дини (1.12), (1.13).

2.3. Свойства оптимальных направлений движения

Используя лемму 1 и утверждение 2 о свойствах полупроизводных Дини для функции цены $V(t,x)$ (1.3) в задаче P (1.1)–(1.3), докажем следующую теорему.

Теорема 1. *В задаче P (1.1)–(1.3) для того, чтобы в точке $(t,x) \in \Gamma_T$ направление $(\overline{f},\overline{g}) \in \widetilde{E}(t,x)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы функция цены $V(t,x)$ была дифференцируема по этому направлению, а также чтобы существовал такой вектор $p \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\overline{f} = f^0(t,x,p), \quad \overline{g} = g^0(t,x,p); \tag{2.3}$$

$$\{(f^0(t,x,p), g^0(t,x,p))\} = E^0(t,x,p); \tag{2.4}$$

$$(-H(t,x,p),\ p) \in \partial_{1,\overline{f}} V(t,x), \tag{2.5}$$

и имело место равенство

$$dV(t,x)/(1,\overline{f}) = \min_{(\alpha',p')\in\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)} \langle(\alpha',p'),(1,\overline{f})\rangle. \tag{2.6}$$

Доказательство. Как следует из доказательства утверждения 2 (см. [11]), необходимыми и достаточными условиями для оптимальности направления $(\overline{f},\overline{g}) \in \widetilde{E}(t,x)$ является выполнение равенств

$$d^{\pm}V(t,x)/(1,\overline{f}) + \overline{g} = 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что равенства (2.7) эквивалентны условиям (2.3)–(2.6).

Если для локально липшицевой функции цены $V(t,x)$ (1.3) в точке $(t,x) \in \in \Gamma_T$ для вектора $(\overline{f},\overline{g}) \in \widetilde{E}(t,x)$ выполняются равенства (2.7), то функция цены дифференцируема по этому направлению, т. е.

$$d^{+}V(t,x)/(1,\overline{f}) = d^{-}V(t,x)/(1,\overline{f}) = dV(t,x)/(1,\overline{f}) = -\overline{g}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) и леммы 1 вытекает, что имеют место неравенства (2.2), а именно

$$\min_{(\alpha,p)\in\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)} \langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle \leqslant dV(t,x)/(1,\overline{f}) \leqslant \max_{(\alpha,p)\in\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)} \langle(\alpha,p)(1,\overline{f})\rangle.$$

Отсюда из непрерывности операции

$$(\alpha,p) \to \langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle$$

и выпуклости множества $\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)$ следует существование такого элемента $(\alpha,p) \in \partial_{1,\overline{f}}V(t,x)$, что справедливо равенство

$$dV(t,x)/(1,\overline{f}) = \langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.8), (2.9) влекут справедливость равенства

$$\alpha + \langle p, \overline{f} \rangle + \overline{g} = 0. \tag{2.10}$$

Элемент $(\alpha, p) \in \partial_{1,\overline{f}} V(t,x)$, согласно теореме Каратеодори [3], представим в виде

$$(\alpha, p) = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \Big(\lim_{(t_{k_i}, x_{k_i}) \to (t,x)} DV(t_{k_i}, x_{k_i}) \Big), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1, \tag{2.11}$$

причем

$$DV(t_{k_i}, x_{k_i}) = (-H(t_{k_i}, x_{k_i}, D_x V(t_{k_i}, x_{k_i})),\ D_x V(t_{k_i}, x_{k_i})); \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} H(t_{k_i}, x_{k_i}, D_x V(t_{k_i}, x_{k_i})) = \langle D_x V(t_{k_i}, x_{k_i}), f^0(t_{k_i}, x_{k_i}, D_x V(t_{k_i}, x_{k_i}))\rangle + \\ + g^0(t_{k_i}, x_{k_i}, D_x V(t_{k_i}, x_{k_i})), \end{aligned} \tag{2.13}$$

последовательности $\{(t_{k_i}, x_{k_i})\}$ представляют собой последовательности регулярных точек функции цены $V(t,x)$.

Из условий A1–A3 для

$$p_i = \lim_{k_i \to \infty} D_x V(t_{k_i}, x_{k_i}) \tag{2.14}$$

вытекает справедливость соотношений

$$\alpha_i = \lim_{k_i \to \infty} -H(t_{k_i}, x_{k_i}, D_x V(t_{k_i}, x_{k_i})) = -H(t, x, p_i); \tag{2.15}$$

$$(\alpha, p) = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i (\alpha_i, p_i). \tag{2.16}$$

Из (2.10), (2.16) получаем

$$\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \alpha_i + \Big\langle \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i p_i,\ \overline{f} \Big\rangle + \overline{g} = 0. \tag{2.17}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = -\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i H(t, x, p_i) + \Big\langle \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i p_i,\ \overline{f} \Big\rangle + \overline{g} = \\ = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \Big[\Big\langle p_i, (\overline{f} - f^0(t, x, p_i)) \Big\rangle + (\overline{g} - g^0(t, x, p_i)) \Big]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Из свойств коэффициентов λ_i и условия A3 вытекает, что равенство (2.18) может выполняться лишь в том случае, если при всех $\lambda_i > 0$ для соответствующих p_i вида (2.14) справедливо

$$\begin{gathered}\overline{f} = f^0(t,x,p_i), \quad \overline{g} = g^0(t,x,p_i);\\ \alpha_i = -H(t,x,p_i);\\ (\alpha_i,p_i) \in \partial_{1,\overline{f}}V(t,x).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Из (2.16) и условия A3 получаем, что для любого вектора $(\alpha,p) \in \partial_{1,\overline{f}}V(t,x)$ справедливы оценки

$$\langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle = \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i\left[-H(t,x,p_i) + \langle p_i,\ \overline{f}\rangle + \overline{g}\right] - \overline{g} \geqslant -\overline{g}. \tag{2.20}$$

Из условий (2.3)–(2.5) и A3 вытекает

$$\langle(-H(t,x,p),p),(1,\overline{f})\rangle = -H(t,x,p) + \langle p,\overline{f}\rangle = -\overline{g.} \tag{2.21}$$

Следовательно, согласно (2.7) имеем

$$-\overline{g} = dV(t,x)/(1,\overline{f}) = \min_{(\alpha,p)\in\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)}\langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle. \tag{2.22}$$

Таким образом, условия (2.3)–(2.6) необходимо выполняются для оптимального направления $(\overline{f},\overline{g}) \in \widetilde{E}(t,x)$. Докажем достаточность этих условий.

Из (2.6) и оценок (2.20) вытекает, что имеют место соотношения

$$dV(t,x)/(1,\overline{f}) = \min_{(\alpha,p)\in\partial_{1,\overline{f}}V(t,x)}\langle(\alpha,p),(1,\overline{f})\rangle \geqslant -\overline{g}. \tag{2.23}$$

Но условия (2.23), (2.3)–(2.6) и A3 влекут равенства

$$\langle(-H(t,x,p),p),(1,\overline{f})\rangle = -H(t,x,p) + \langle p,\overline{f}\rangle = -\overline{g}; \tag{2.24}$$

$$dV(t,x)/(1,\overline{f}) + \overline{g} = 0. \tag{2.25}$$

Равенство (2.25) эквивалентно равенствам (2.7), которые, в силу утверждения 2, являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Теорема 1 доказана.

3. Репрезентативная формула функции цены

Суммируя вышесказанное из утверждения 5 и теоремы 1, получаем для построения локально липшицевой функции цены $V(t,x)$ (1.3) следующее обобщение классического метода характеристик Коши.

Теорема 2. *Для любой начальной точки* $(t,x) \in \Gamma_T$ *имеет место следующее представление функции цены* $V(t,x)$ *(1.3):*

$$V(t,x) = \sigma(y) + \int_t^T g^0(\tau, \widehat{x}^0(\tau,y), \widehat{p}^0(\tau,y))\, d\tau, \tag{3.1}$$

где $\widehat{x}^0(\cdot,y)$ *– обобщенные характеристики* (1.16), *которые пересекаются в точке* (t,x): $\widehat{x}^0(t,y) = x$ *и при всех* $\tau \in [t,T]$ *удовлетворяют соотношениям*

$$(-H(\tau, \widehat{x}^0(\tau,y), \widehat{p}^0(\tau,y)),\ \widehat{p}^0(\tau,y)) \in \partial_{1,f^0(\tau,\widehat{x}^0(\tau,y),\widehat{p}^0(\tau,y))} V(\tau, \widehat{x}^0(\tau,y)). \tag{3.2}$$

Замечание 2. Обобщенные характеристики $\widehat{x}^0(\cdot,y)$ совпадают с оптимальными траекториями $x^0(\cdot;t,x,u^0(\cdot)) : [t,T] \to \mathbb{R}^n$ динамической системы (1.1), стартующими из точки (t,x) под воздействием оптимальных управлений $u^0(\cdot) \in \mathbf{U}_{[t,T]}$:

$$\widehat{x}^0(T,y) = y = x^0(T;t,x,u^0(\cdot)).$$

Отметим, что теорема 2 уточняет утверждение 5, так как содержит дополнительное условие (3.2). Сужение множества обобщенных характеристик, необходимых для вычисления функции цены, делает полученные выше результаты более удобными для использования при численном построении локально липшицевой функции цены с помощью попятных процедур на базе обобщенных характеристик уравнения Беллмана [12].

Литература

1. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

2. Веллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

7. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.

8. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

9. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

10. Субботин А. И., Субботина Н. Н. К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 24–32.

11. Субботина Н. Н. Обобщенное уравнение Беллмана в задаче оптимального управления с локально липшицевыми входными данными // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика. 2003. Т. 26, № 5. С. 148–157.

12. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Алгоритм построения минимаксного решения уравнения Беллмана в задаче Коши с дополнительными ограничениями // Тр. ИММ УрО РАН. Динамические системы: моделирование, оптимизация и управление. 2006. Т. 12, № 1. С. 208–215.

13. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.

14. Cannarsa P., Frankowska H. Some characterization of optimal trajectories in control theory // SIAM J. Control Optim. 1991. Vol. 29. P. 1322–1347.

15. Fleming W. H. The Cauchy problem for a nonlinear first order differential equation // J. Differential Equations. 1969. Vol. 5. P. 555–580.

16. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. N. Y.: Springer-Verlag, 1993.

17. Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd edition. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.

18. Leitman G. One approach to the control of uncertain dynamical systems // Appl. Math. Comput. 1995. Vol. 70. P. 261–272.

19. Melikyan A. A. Generalized Characteristics of First-Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998.

20. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational Analysis. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.

21. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.